II Teorema di Laplace

$M \in \mathbb{K}^{n,n}$ $\qquad \Gamma_{ij} := (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$

$$\forall j,k: \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \Gamma_{ik} = \begin{cases} \det(M) & \text{se } k=j \leftarrow \text{I Teorema di Laplace} \\ 0 & \text{se } k \neq j \end{cases}$$

- $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \Gamma_{ij} = \sum a_{ij} (-1)^{i+j} \det(M_{ij}) = \det(M)$

- $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \Gamma_{ik} = \det(M')$ ove M' = matrice ottenuta da M sopprimendo la j-esima ~~riga~~ colonna nella k-esima riga $= 0$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$j=1 \quad k=2$

$$a_{11}\Gamma_{12} + a_{21}\Gamma_{22} + a_{31}\Gamma_{32} + a_{41}\Gamma_{42} =$$

$$= (-1)^{1+2} a_{11} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} a_{21} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{2+3} a_{31} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + (-1)^{2+4} a_{41} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} =$$

$$= \det \begin{bmatrix} -a_{11} & a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{21} & a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ -a_{31} & a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ -a_{41} & a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = 0$$

□

Sia $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ poniamo $A^* = (\Gamma_{ij})_{i,j=1}^{n}$

Teorema: $\boxed{A \cdot {}^T\!A^* = \det(A)\, I_n}$

quindi se $\det(A) \neq 0$ $\quad A^{-1} = \det(A)^{-1}\, {}^T\!A^*$

DIM: l'entrata i,j in $A^T A^a$ è esattamente il prodotto della i-esima riga di A

$$(a_{i1} \dots a_{in})$$

per la j-esima colonna di $A^T a$ =

$= j$-esima riga di A^a

$$(\Gamma_{j1} \dots \Gamma_{jn})$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \Gamma_{jk} = \begin{cases} \det(A) & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix} = A^a$$

□

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & 0 \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{bmatrix}$$

A ↑ , ${}^{T}A^{\#}$ ↑

⚠ Il determinante è definito solo per matrici quadrate !!

→ Legame fra determinanti e rango delle matrici.

(oss: $\det A = \det {}^{T}A$ se $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ ⇒ ogni ragionamento fatto sulle colonne si applica anche sulle righe).

Teorema di Kronecker:

Sia $A \in \mathbb{K}^{m,n}$. Un minore quadrato di A è una sottomatrice M quadrata contenuta in A.

Si dice ordine di un minore (quadrato) M il suo numero di righe = numero di colonne.

Si dice che M è singolare se $\det(M) = 0$

non singolare se $\det(M) \neq 0$

Teorema: Una matrice $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ ha rango k se e solamente se essa contiene un minore (quadrato) non singolare di ordine k e tutti i suoi minori di ordine $> k$ sono singolari.

$$\left[\; rk(A) = k \iff k = \text{massimo ordine di un minore non singolare contenuto in } A. \;\right]$$

DIM:

Lemma 1: Siano $\bar{v}_1, \bar{v}_2 \dots, \bar{v}_k \in \mathbb{K}^n$ k vettori
Allora la sequenza $(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_k)$ è libera
$\iff$ la matrice che ha $\bar{v}_1 \dots \bar{v}_k$ come righe contiene un minore $k \times k$ con determinante diverso da zero.

oss: La matrice del lemma ha al più rango k in quanto lo sp. vettoriale delle sue colonne è un sottospazio di $\mathbb{K}^k$

DIM: Se i vettori $(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_k)$ sono legati $\Rightarrow$ uno di essi è combinazione lineare dei rimanenti. Comunque si ottenga ora un minore $k \times k$ della matrice (cancellando $n-k$ colonne) questo contiene una riga che è ancora c.lineare delle rimanenti $\Rightarrow$ $\det$ di questo minore $= 0$ e quindi la matrice NON CONTIENE MINORI DI ORDINE K NON SINGOLARI.

Se i vettori $(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_k)$ sono liberi $\Rightarrow$ è sempre possibile completarli a base di $\mathbb{K}^n$ aggiungendo $n-k$ vettori della base canonica $(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_k \, \bar{e}_{i_1} \dots \bar{e}_{i_{n-k}})$

La matrice che ha per righe i vettori dati ha $\det \neq 0$

$$M' := \begin{bmatrix} v_{11} & \dots & v_{1n} \\ v_{21} & \dots & v_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{k1} & \dots & v_{kn} \\ 0 & 0 \; 1 \; 0 \dots & 0 \\ 0 & 0 \; 0 \; 0 \; 1 \; 0 \dots & 0 \end{bmatrix}$$

in ognuna delle righe aggiunte $\exists!$ entrata non nulla.

calcoliamo $\det(M')$ usando Laplace a partire dall'ultima riga.

$$\det(M') = \pm \det\left(M'_{n, i_{n-k}}\right) =$$

$$= \pm \det\left(M'_{n, i_{n-k}}\right)_{n-1, i_{n-k-1}} = \dots$$

$$= \pm \det\left(M^0_{-, i, \dots i_{n-k}}\right) =$$

$\det$ del MINORE di M^0 = matrice iniziale

$k \times n$

in cui ho cancellato le colonne

$i_1 \dots i_{n-k}$

$\Rightarrow \exists$ in M^0 un minore $k \times k$ con $\det \neq 0$ □

$$M^0 = \begin{pmatrix} v_{11} \dots v_{1n} \\ \vdots \\ v_{k1} \dots v_{kn} \end{pmatrix} \Big] k$$

$$X = \begin{pmatrix} 0\,0\,1\,0\,0 \dots \\ \vdots \\ 0 \dots 0\,1 \dots 0 \end{pmatrix} \Big] n-k$$

DIM TEOREMA. Sia $M \in \mathbb{K}^{m,n}$ una matrice e supponiamo che $\dim \mathcal{L}(R) = k$

$\Rightarrow$ l'insieme delle righe di M contiene un sottoinsieme di k righe linearmente indipendenti.

$\Rightarrow$ per il lemma queste k righe contengono un minore $k \times k$ con $\det \neq 0$

$\Rightarrow$ $k \leq$ massimo ordine di un minore di M con $\det \neq 0 = \rho$

Viceversa: supponiamo che sia $\rho > k \Rightarrow$

$\Rightarrow$ M contiene un minore $(k+1)\times(k+1)$ con $\det \neq 0$

$\Rightarrow$ per il lemma le righe intercettate da questo minore sono l. indip. $\Rightarrow$ $\dim \mathcal{L}(R) \geq k+1$ $\lightning$

$\Rightarrow$ $\rho \leq k \Rightarrow \rho = k$.

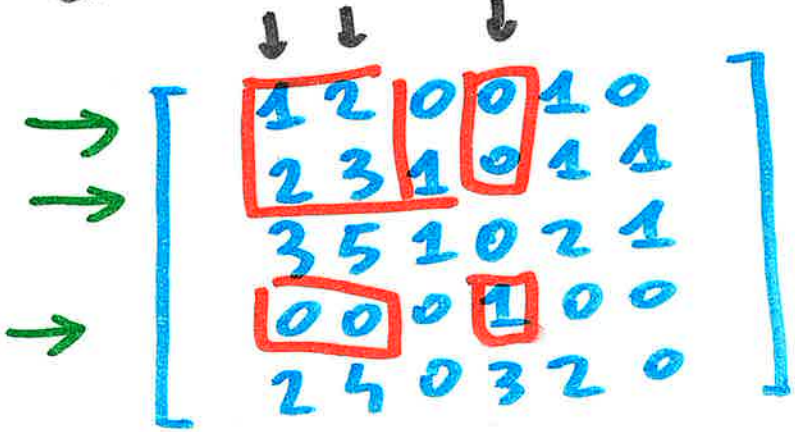
Siccome $\det(M) = \det({}^tM)$ ne segue che anche il più grande minore di ${}^tM$ con $\det \neq 0$ ha ordine $k \Rightarrow \dim \mathcal{L}(R) = e = \dim(C)$ e dunque $e = rk(M) = \dim \mathcal{L}(C) = \dim \mathcal{L}(R)$. □

CONSEGUENZE: $M \in \mathbb{K}^{m,n}$

1) $rk(M) = e(M)$
2) $\dim \mathcal{L}(R) = \dim \mathcal{L}(C)$
3) $rk(M) \leq \min(m,n)$.
4) Se vogliamo estrarre una sequenza libera di vettori di $\mathbb{K}^n$ da una seq. $(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_k) \in \mathbb{K}^n$ si può procedere come segue:

a) identifichiamo nella matrice che ha per righe (colonne) $\bar{v}_{i_1} \dots \bar{v}_{i_k}$ una matrice S n.sing. di ordine t massimo.

b) prendiamo le righe (colonne) in posizione $i_1 \dots i_k$ come elementi della nostra sequenza libera.



$n \, k = 3$

$\mathcal{B}_R = ((1\,2\,0\,0\,1\,0), (2\,3\,1\,0\,1\,1), (0\,0\,0\,1\,0\,0)) \leq \mathbb{K}^6$

$\mathcal{B}_C = ({}^T(1\,2\,3\,0\,2), {}^T(2\,3\,5\,0\,4), {}^T(0\,0\,0\,1\,3)) \leq \mathbb{K}^5$

per calcolare $rk(M)$ $M \in \mathbb{K}^{m,n}$ procedere come segue.

for $i = 1 \dots \min(m,n)$

se $\forall$ minori di ordine i ha $\det = 0 \rightarrow i-1$

end for.

$\rightarrow \min(m,n)$

es. $rk(M) = 3 \iff \exists$ minore di ordine 3 con $\det \neq 0$

e $\forall$ minore di ordine h ha $\det = 0$

$M \in \mathbb{K}^{7,7}$ $\binom{7}{4} \cdot \binom{7}{4}$ $\frac{7!}{4! \cdot 3!} = 5 \cdot 7 = 35$

Teorema degli orlati.

Una matrice M ha rango k $\Leftrightarrow$
essa contiene un minore non singolare di ordine k ed ogni minore di ordine $(k+1)\times(k+1)$ che contiene questo minore ha $\det = 0$.

orlato

[3×3 $7-3=4$ $7-3=4$ $\rightarrow$ 16 minori:]

DIM: Se $rk(M)=k \Rightarrow$ ogni minore $(k+1)\times(k+1)$ ha $\det = 0 \Rightarrow$ pure gli orlati di un minore $k\times k$ con $\det \neq 0$

Sia S un minore $k\times k$ di M con $\det(S) \neq 0$.
Mostriamo che se $rk(M) > k \Rightarrow$ esiste almeno un

orlato S' di S con $\det \neq 0$.

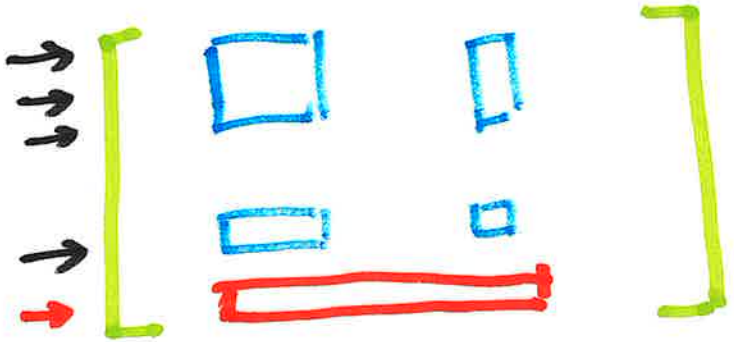
[questo implica che se $\forall$ orlato di S ha $\det = 0 \Rightarrow rk(M) \leq k$ ma $\det(S) \neq 0 \Rightarrow rk(M) \geq k$

$\Rightarrow rk(M) = k$]

Siano $R_{i_1} \dots R_{i_k}$ le righe intercettate da S

$\Rightarrow$ esse sono un sistema libero.

Se $rk(M) > k \Rightarrow \exists$ almeno un'altra riga in M indipendente da $R_{i_1} \dots R_{i_k}$. Chiamiamola R'



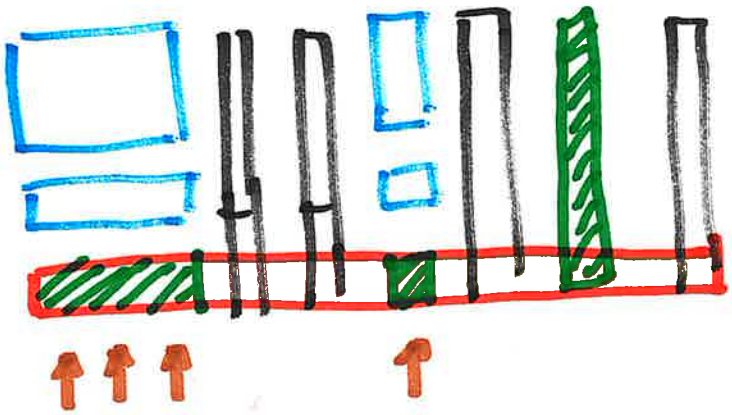
consideriamo la matrice con righe $(R_{i_1} \dots R_{i_k}, R')$.

Questa matrice ha rango $(k+1)$ e quindi contiene

un minore $(k+1)\times(k+1)$ con $\det \neq 0$

e in particolare lo spazio vettoriale delle sue

COLONNE HA $\dim = k+1$



le colonne intercettate da S in questa matrice

sono libere e ~~formano~~ generano un sott. di dim k.

$\Rightarrow$ possiamo completare a base tale ~~sottospazio~~ sequenza.

aggiungendo una colonna $\rightarrow$ in questo modo

otteniamo un minore $(k+1)\times(k+1)$ con $\det \neq 0$

che contiene S. $\Rightarrow \exists$ un orlato di S non singolare $\square$

Sistemi lineari.

Def: Un sistema lineare nel campo $\mathbb{K}$ è una collezione di m equazioni di primo grado in n incognite.

Una equazione di I grado è una scrittura

$$a_{i1}x_1 + a_{in}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i \quad (*)$$

ove $a_{ij} \in \mathbb{K}$, $b_i \in \mathbb{K}$ mentre

$x_1 \dots x_n$ sono simboli.

a_{ij} := coefficienti

x_j : incognite

b_i : termini noti.

(*) eq. lineare (= di I grado) nelle incognite $x_1 \dots x_n$ nel campo $\mathbb{K}$.

Una n-upla $(s_1 \dots s_n) \in \mathbb{K}^n$ è soluzione di una equazione

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i$$

se sostituendo ad $(x_1 \dots x_n)$ i valori $(s_1 \dots s_n)$ l'identità

$$a_{i1}s_1 + \dots + a_{in}s_n = b_i$$

è soddisfatta

Dato un sistema lineare di m equazioni in n incognite sul campo $\mathbb{K}$, si dice soluzione del sistema ogni $(s_1 \dots s_n) \in \mathbb{K}^n$ che risolve contemporaneamente tutte le equazioni.

Se non esiste alcun vettore che risolve il sistema $\Rightarrow$ il sistema è detto **incompatibile**.
altrimenti il sistema è detto **compatibile**.

$$(*)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = b_1$$

$$\begin{bmatrix} a_{21} \dots a_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = b_2$$

$$\vdots$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1} \dots a_{mn} \end{pmatrix}$$

matrice incompleta del sistema

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

vettore delle incognite

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

vettore dei termini noti

(*) $\boxed{AX = B}$ ← forma matriciale del sistema.

Se A è quadrata ed invertibile $\Rightarrow$

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$$

$$\| $$

$$X = IX = A^{-1}B$$

$A \in \mathbb{K}^{n,n}$ $\quad ax = b$ $\quad a \neq 0$ $\quad x = a^{-1}b$

consideriamo (*) e la funzione lineare

$$f_A : \begin{cases} \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m \\ X \to AX \end{cases}$$

$f_A(X) = B$

cosa vuol dire risolvere il sistema?

Trovare, se esistono, le preimmagini di B secondo f_A.

Oss: B ammette preimmagine secondo f_A $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $B \in \operatorname{Im} f_A$

ma $\operatorname{Im} f_A$ è generata dalle colonne di A

$B \in \operatorname{Im} f_A \Leftrightarrow B \in \mathcal{L}(C_A)$

$\Leftrightarrow$ B è lin. dip. da una base di $\mathcal{L}(C_A)$

$\Leftrightarrow$ $\mathcal{L}(C_A \cup \{B\}) = \mathcal{L}(C_A)$

$\Leftrightarrow$ $\dim \mathcal{L}(C_A \cup \{B\}) = \dim \mathcal{L}(C_A)$

$\Leftrightarrow$ $\operatorname{rk}(A|B) = \operatorname{rk}(A)$

dove $(A|B)$ = matrice completa del sistema =

matrice ottenuta da A
aggiungendovi la colonna B.

Teorema (Rouché-Capelli):

Un sistema lineare $AX = B$ è compatibile $\Leftrightarrow \operatorname{rk}(A) = \operatorname{rk}(A|B)$

Dim: vedi sopra: B deve ammettere preimmagine secondo $f_A : X \to AX$ □

Se $AX = B$ non compatibile $\Rightarrow$ 0 soluzioni.

In generale $AX = B$ ammette una ed una sola soluzione $\Leftrightarrow \ker f_A = \{0\} \Leftrightarrow \dim \operatorname{Im}(f_A) = \dim \mathbb{K}^n = n$

In questo caso il sistema è detto equivalente ad un sistema di Cramer. (o anche determinato) e la matrice A ha rango massimo possibile.

N.B: Se $m < n$ (meno equazioni che incognite) $\Rightarrow$ il sistema non ha mai una sola soluzione.

Teorema: Sia $AX = B$ un sistema compatibile. Allora ogni soluzione di $AX = B$ si può scrivere come $\bar{X} = X_0 + Z$ ove X_0 = soluzione particolare fissata e Z soluzione del sistema omogeneo associato $AX = \underline{0}$.

DM: OGNI PREIMMAGINE DI B secondo f_A SI SCRIVE COME $X_0 + Z$ con $Z \in Ker(A) = Ker(f_A)$

e X_0 preimmagine fissata. □

[X_0, X_1 due soluzioni $\Rightarrow AX_0 = AX_1 \Rightarrow$

$A(X_0 - X_1) = 0$

$\Rightarrow X_0 - X_1 \in Ker(A) \Rightarrow$

$X_1 - X_0 \in Ker(A) \Rightarrow$

$\Rightarrow X_1 = X_0 + Z$ con $Z = X_1 - X_0$

$A(X_0 + Z) = AX_0 + AZ = AX_0$ se $Z \in Ker(A)$]

Def: Sia $AX = B$ un sistema lineare compatibile.

Si dice che il sistema ha ∞^t soluzioni se $t = \dim(\ker(A))$.

$\infty^0 = 1$

Il numero $t = \dim(\ker(A))$ indica da quanti parametri dipendono le soluzioni.

$S = \text{soluzioni} = X_0 + \ker(A) =$

$= X_0 + \mathcal{L}(\bar{b}_2 \dots \bar{b}_{t+1}) =$

($\mathcal{L}(\bar{b}_2 \dots \bar{b}_{t+1})$: base di $\ker(A)$)

$= X_0 + \alpha_2 \bar{b}_2 + \dots + \alpha_t \bar{b}_t$ al variare di $(\alpha_2 \dots \alpha_{t+1}) \in \mathbb{K}^t$

□

Sia $AX = B$ compatibile $\Leftrightarrow$ $rk(A) = rk(A|B) = \dim(\mathrm{Im}\, f_A)$

$\Rightarrow$ $\mathrm{null}(f_A) = \dim(\ker A) = n - \dim \mathrm{Im}(f_A) =$

(n = dim dominio)

$= n - rk(A)$.

<u>oss:</u> L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare è un sottospazio vettoriale $\Leftrightarrow$ il sistema è omogeneo, cioè $B = \underline{0}$.

<u>DIM:</u> Se $B = \underline{0} \Rightarrow S = \ker(A) \leq \mathbb{K}^n$

Se $B \neq \underline{0} \Rightarrow \underline{0} \notin S \Rightarrow S$ non è sp. vettoriale. □

DATO $AX=B$ sistema lineare e S = insieme soluzioni di $AX=B$

calcolare $\dim \mathcal{L}(S)$.

- $AX=B$ incompatibile $\Rightarrow S=\phi \Rightarrow \mathcal{L}(S)=\{\underline{0}\}$.
  $\Rightarrow \dim \mathcal{L}(S)=0$

- $AX=\underline{0}$ omogeneo $\Rightarrow \mathcal{L}(S)=S \Rightarrow \dim \mathcal{L}(S)=$
  $=\dim S = n-rk(A)$.

- $AX=B$ non omogeneo $\Rightarrow \mathcal{L}(S)=\mathcal{L}(X_0 \cup Ker\,A)$
  $B\neq\underline{0}$
  $\Rightarrow \dim \mathcal{L}(S)=\dim(Ker(A))+1$
  $=n-rk(A)+1$

Def Due sistemi lineari $AX=B$ e $A'X=B'$ compatibili sono equivalenti se essi hanno le stesse soluzioni.

Teorema: Due sistemi lineari $AX=B$ e $A'X=B$ sul compatibili su $\mathbb{K}$ sono equivalenti $\Leftrightarrow$

$$\mathcal{L}(R_{(A|B)}) = \mathcal{L}(R_{(A'|B')}) \leq \mathbb{K}^{n+1}$$

cioè $\Leftrightarrow$ gli spazi vettoriali generati dalle rispettive equazioni coincidono.

DIM: MOSTRIAMO CHE AGGIUNGERE VETTORI DI

$$\mathcal{L}(R_{AIB})$$

NON CAMBIA LE SOL. DEL SISTEMA E

EFFETTUARE SOMMARE AD UNA EQ. DEL SISTEMA

UNA C. LINEARE DELLE RIMANENTI NON CAMBIA

LE SOL. E ANCHE MOLTIPLICARE UNA EQ. PER $\alpha \neq 0$.

$(s_1 \dots s_n)$ sol. di $a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_n$

$\Rightarrow$

$$\alpha(a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n) = \alpha b_n$$

avrà come soluzione $(s_1 \dots s_n)$

Viceversa: se $\alpha \neq 0 \Rightarrow$ ogni sol. di $k(a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n) = kb_n$

è soluzione di $a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_n$

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

$\Rightarrow$ $(s_1 \dots s_n) \in \mathbb{K}^n$ soluzione $\Rightarrow$

$$\Rightarrow a_{11}s_1 + \dots a_{1n}s_n = b_1$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}s_1 + \dots + a_{mn}s_n = b_m$$

$$\Rightarrow (a_{11}s_1 + \dots + a_{1n}s_n) + \sum \alpha_j (a_{j1}s_1 - \dots - a_{jn}s_n) =$$
$$= b_1 + \sum \alpha_j b_j$$

□